به نام هست کننده از نیستی و نیست کننده پس از هستی

پویش علمی ماندگار البرز

دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

حسابان (۲) دوازدهم

معجون شب امتحان

تهیه و تنظیم: محسن شمعی

پویش جهاد علمی البرز – دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل اول

تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

انتقال‌های عمودی و افقی

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ می‌بایست نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا (اگر $k > 0$) و یا به سمت پایین (اگر $k < 0$) انتقال دهیم، بنابراین بُرد تابع به اندازه k واحد اضافه یا کم می‌شود.

برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ اگر $(k > 0)$ باشد، باید نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ و اما اگر $(k < 0)$ باشد باید این انتقال را به اندازه k واحد به سمت راست انجام دهیم، بنابراین دامنه تابع به اندازه $-k$ واحد جابه‌جا می‌شود.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار تابع $y = k\,f(x)$ باید عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را k ضرب کنیم.

اگر $|k| > ۱$ باشد، نمودار **انبساط عمودی** و اگر $۰ < |k| < ۱$ باشد، نمودار **انقباض عمودی** دارد.

در حالتی که $k = -۱$ باشد، نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور xها می‌باشد.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

انبساط و انقباض افقی

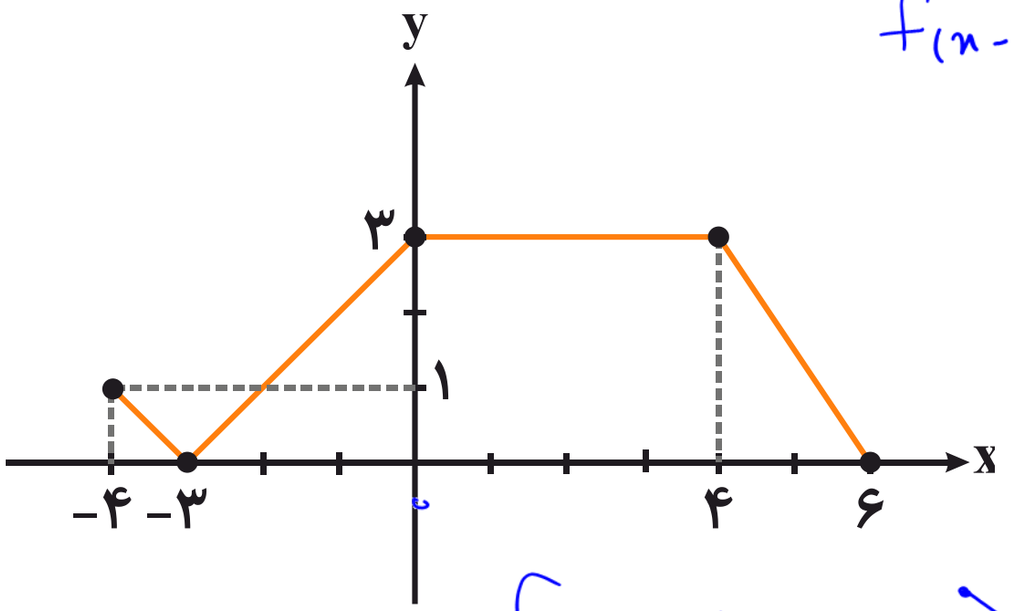
برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ باید طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم،

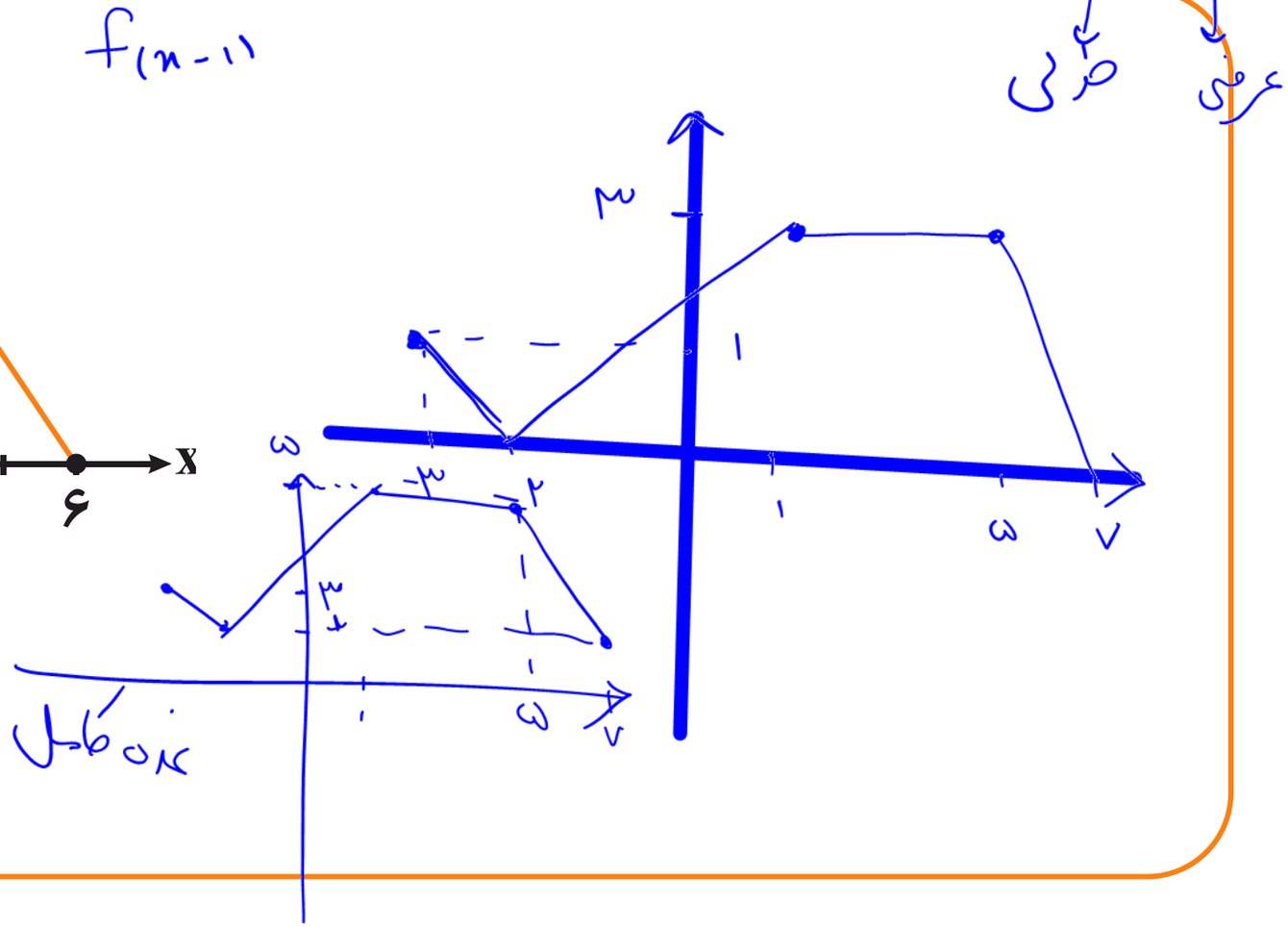
اگر $|k| > 1$ باشد، انقباض افقی در راستای محور xها و اگر $0 < |k| < 1$ باشد، انبساط افقی در راستای محور xها داریم.

در حالتی که $k = -1$ باشد، نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور yها می‌باشد.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

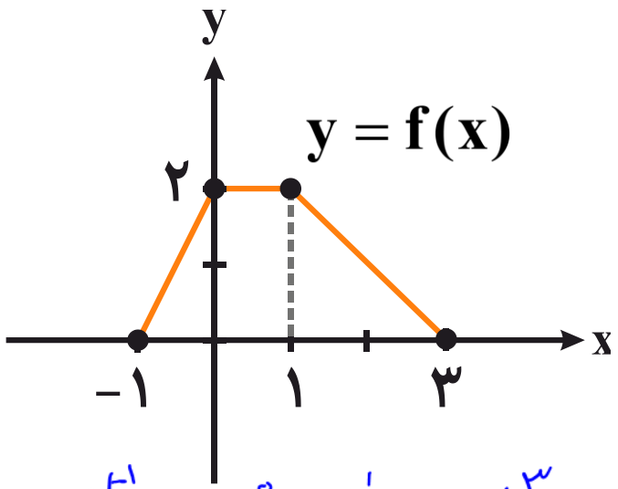
سوال ۱- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. مطلوبست تعیین نمودار، دامنه و برد تابع $y = f(x-۱)+۲$ را رسم کنید.





پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲- به کمک نمودار تابع $f(x)$، نمودار تابع $y = ۲f(-\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.

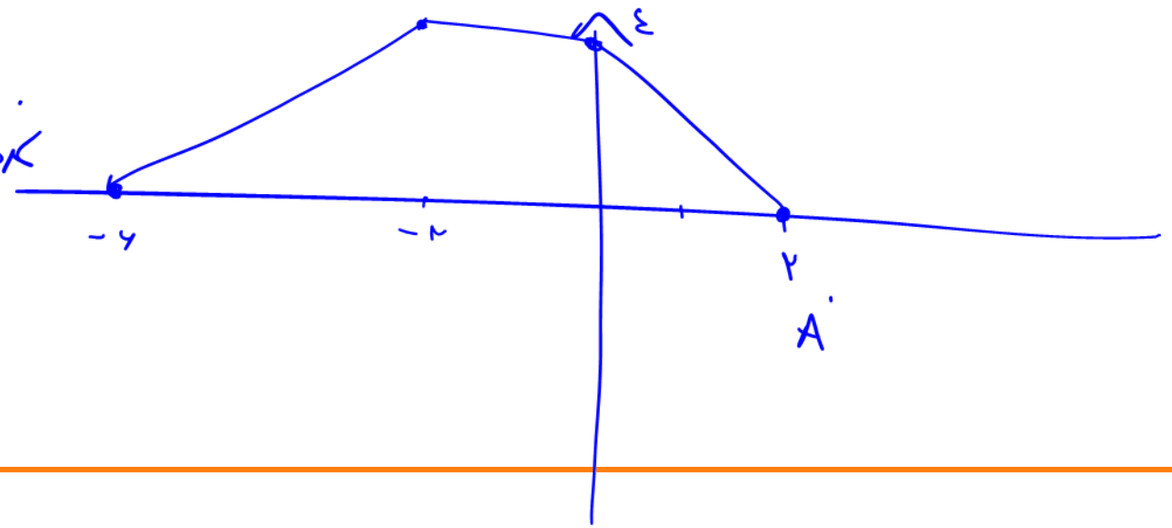


$A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ $D\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$

$۲f\left(\frac{x}{-۲}\right)$

$A'\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$ $B'\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$ $C'\left|\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}\right.$ $D'\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right.$

نمودار کامل



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل اول

تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا، گنش‌پذیری و تقسیم

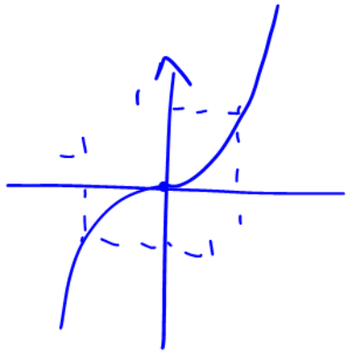
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تابع چندجمله‌ای درجه n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \ , \ a_n \neq 0$$

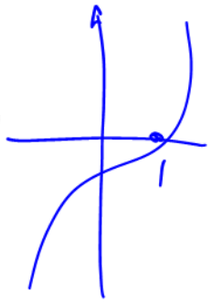
بزرگ‌ترین توان متغیر یک تابع چندجمله‌ایی را، درجه آن چندجمله‌ای معرفی می‌کنند و در تمام حالات، دامنه آن برابر $\mathbb{R}$ است. به شرط آنکه $a_n, a_{n-1}, \dots, \in \mathbb{R}$ ضرایب چندجمله‌ای و $n \in W$ (اعداد حسابی) باشند.

نمودار $y = x^3$ را در نظر داشته باشید:

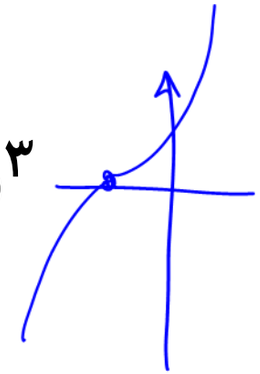


بنابراین،

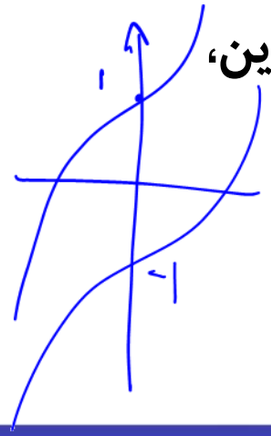
۱) $y = (x-1)^3$



۲) $y = (x+1)^3$



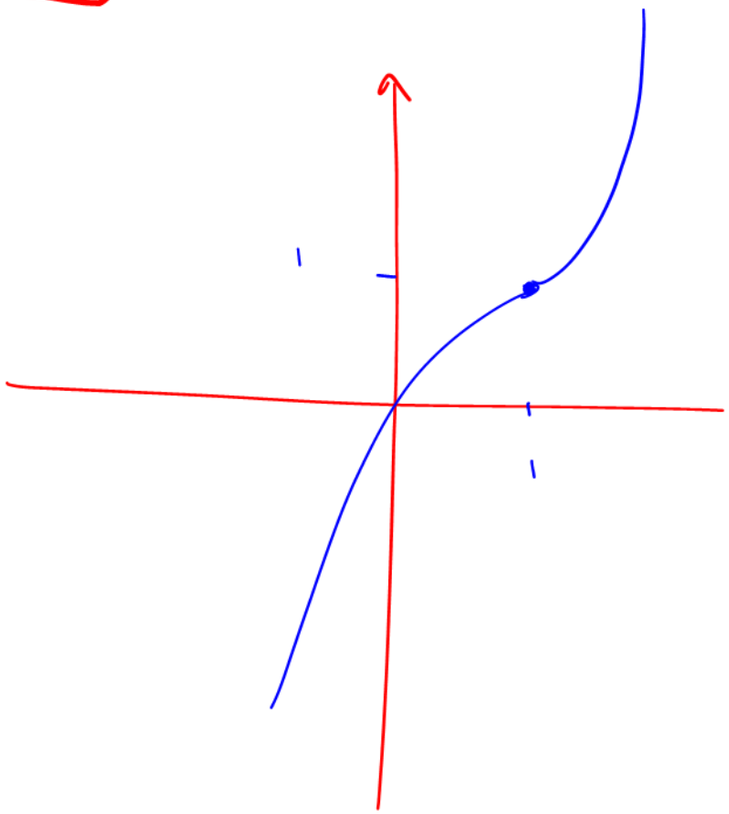
۳) $y = x^3 \pm 1$



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳- نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x$ را با کمک $y = x^{۳}$ رسم کنید.

$$\underbrace{x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱}\ +۱ = (x-۱)^{۳} + ۱$$



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

توابع صعودی و نزولی

اگر برای هر دو نقطه a و b از دامنه تابع که $a < b$، داشته باشیم: $(a \neq b)$

الف) اگر $f(a) \leq f(b) \leftarrow$ آنگاه f در یک بازه صعودی است.

ب) اگر $f(a) \geq f(b) \leftarrow$ آنگاه f در یک بازه نزولی است.

پ) اگر $f(a) < f(b) \leftarrow$ آنگاه f در یک بازه اکیداً صعودی است.

ت) اگر $f(a) > f(b) \leftarrow$ آنگاه f در یک بازه اکیداً نزولی است.

نکته!

۱- تابع یکنوا، تابعی است که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد.

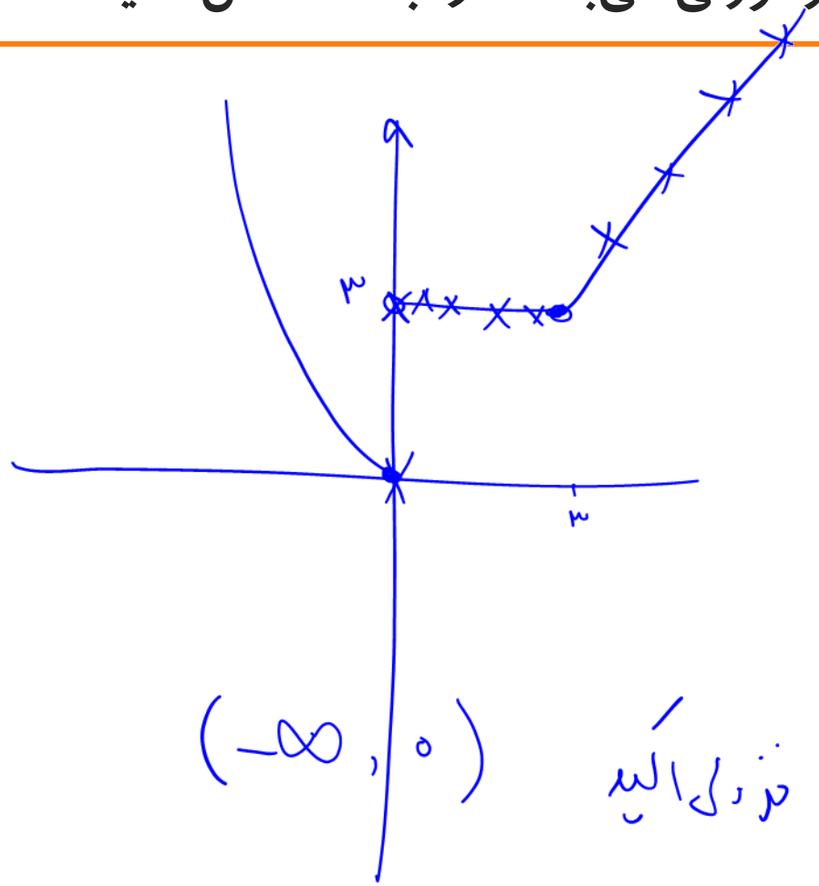
۲- تابع ثابت $f(x) = c$ تابعی هم صعودی و هم نزولی است، ولی اکید نمی‌باشد.

۳- به تابعی که در یک بازه، فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گوییم.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۴- نمودار تابع زیر را رسم کرده، سپس بازه‌هایی را که تابع در آن صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی و هم صعودی و نزولی می‌باشد، را به مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x \le ۰ \\ ۳ & ۰ < x < ۳ \\ x & x \ge ۳ \end{cases}$$



صعودی $[۰, +\infty)$

نزولی $(-\infty, ۰) \cup (۰, ۳]$

صعودی اکید $(۳, +\infty)$

نزولی اکید $(-\infty, ۰)$

هم صعودی و هم نزولی $(۰, ۳]$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تقسیم و بخش‌پذیری

$$\underbrace{P(x)}_{\text{(مقسوم)}} = \overbrace{\underbrace{(x-a)}}^{\text{(مقسوم‌علیه)}} \underbrace{q(x)}_{\text{(خارج‌قسمت)}} + \overbrace{\underbrace{r}}^{\text{(باقیمانده)}}$$

حالت خاص:

اگر $r=0$ باشد $P(x)$ بر $(x=a)$ بخش‌پذیر است به عبارت دیگر $(x-a)$ یکی از عامل‌های تجزیه $P(x)$ می‌باشد. $P(a)=0$

نکته!

حاصل مقسوم به ازای ریشه مقسوم‌علیه برابر است با مقدار باقیمانده تقسیم $P(a)=r$.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

تعمیم اتحاد چاق و لاغر

۱) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

۲) $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$

۳) $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - a^1x^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۵- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای x^3+ax^2+bx+2 بر $x-1$ و $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

$x-1=0 \longrightarrow x=1$: $1+a+b+2=0 \longrightarrow a+b=-3$

$x+2=0 \longrightarrow x=-2$: $-8+4a-2b+2=0 \longrightarrow 4a-2b=6$

$$\times 2 \begin{cases} 4a-2b=6 \\ a+b=-3 \end{cases}$$

$6a=0 \longrightarrow \boxed{a=0} \longrightarrow \boxed{b=-3}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۶- $x^{۶} - ۱$ را تجزیه کنید.

$$x^{۶} - ۱ = (x-۱)(x^{۵} + x^{۴} + x^{۳} + x^{۲} + x + ۱)$$

$$x^{۶} - ۱ = (x+۱)(x^{۵} - x^{۴} + x^{۳} - x^{۲} + x - ۱)$$

سوال ۷- چندجمله‌ای $x^{۵} + ۳۲$ را با عامل $x + ۲$ تجزیه کنید.

$$x^{۵} + ۲^{۵} = (x+۲)(x^{۴} - ۲x^{۳} + ۴x^{۲} - ۸x + ۱۶)$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل دوم

مثلثات

درس اول: تناوب و تاثرانت

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

تناوب و تانژانت

تابع f را متناوب می‌نامیم. هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشد به طوری که: $f(x \pm T) = f(x) \Rightarrow x \pm T \in D_f \rightarrow x \in D_f$ برای هر کوچک‌ترین عدد مثبت T با این ویژگی را دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

نکته!

توابع مثلثاتی به فرم $y = a\sin bx + c$ و یا $y = a\cos bx + c$ دارای ماکسیمم مقدار به اندازه $|a| + c$ و مقدار مینیمم به اندازه $-|a| + c$ و دور تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ می‌باشد.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۸- دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = ۴\sin(-۳x) - ۱$ $\longrightarrow$ $max = |a| + c = ۴ - ۱ = ۳$

$min = -|a| + c = -۴ - ۱ = -۵$

$$\begin{cases} a = ۴ \\ b = -۳ \\ c = -۱ \end{cases}$$

$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|-۳|} = \frac{۲\pi}{۳}$

ب) $y = ۶\cos(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۳}) + ۳$ $\quad (\frac{۱}{۲}x + \frac{\pi}{۳})$

$$\begin{cases} a = ۶ \\ b = \frac{۱}{۲} \\ c = ۳ \end{cases}$$

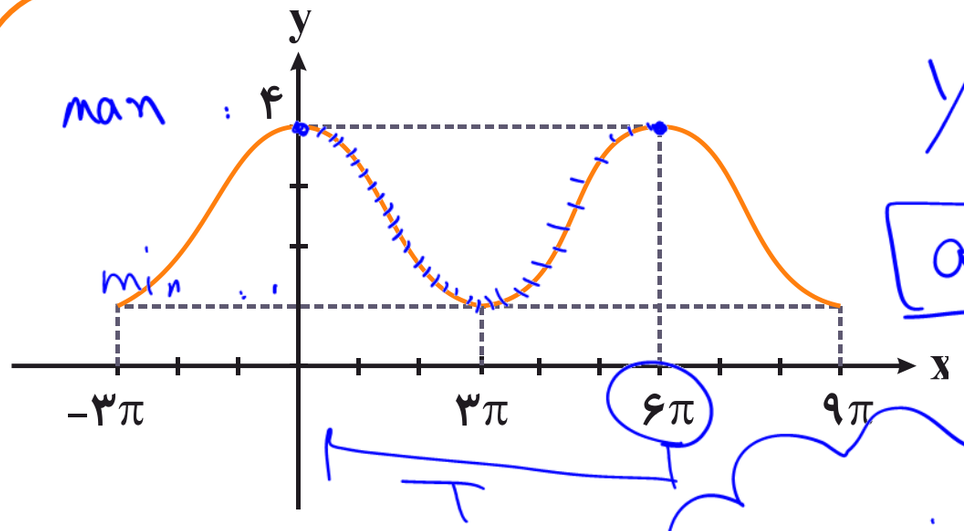
$max = ۹$

$min = -۶ + ۳ = -۳$

$T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|} = ۴\pi$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۹- برای نمودار زیر تابع مثلثاتی به فرم $y = a\sin bx + c$ و یا $y = a\cos bx + c$ مناسب تعریف کنید.



$y = a\cos bx + c$

$\boxed{a > 0}$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{3}$

$b = \pm\frac{1}{3}$

$\max = |a| + c$

$\min = -|a| + c$

$\frac{\max + \min}{2} \rightarrow c$

$c = 2.5$

$y = 1.5\cos(\pm\frac{x}{3}) + 2.5$

$\frac{\max - \min}{2} \rightarrow |a|$

$|a| = 1.5 \rightarrow a = \pm 1.5 \rightarrow a = 1.5$

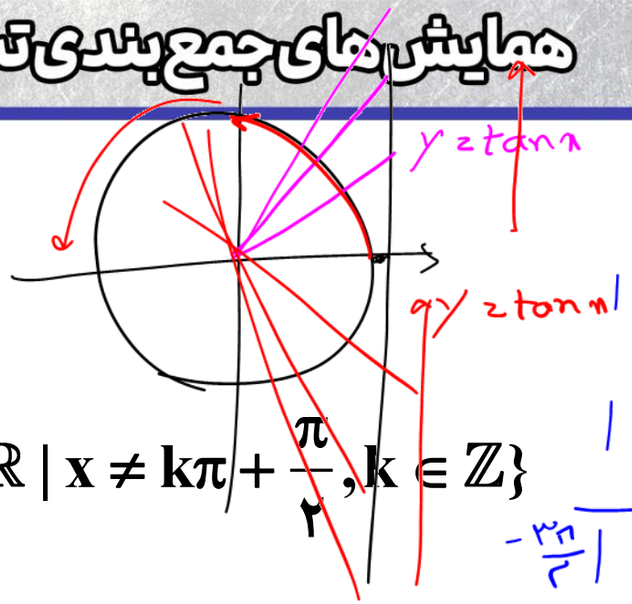
پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تابع تانژانت

$y = \tan ax$

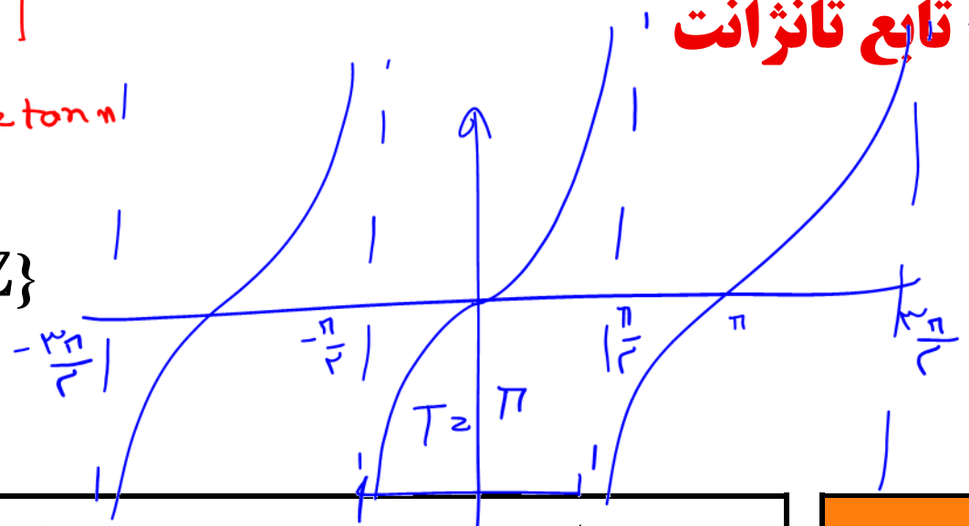
$T = \frac{\pi}{|a|}$

$f(x) = \tan x$

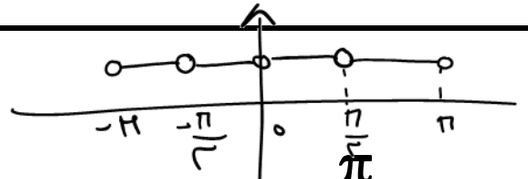


دامنه برد: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

بُرد تابع: $R_f = \mathbb{R}$



نکته!



۱) $y = \tan x$ متناوب و دوره تناوب آن $T = \pi$ است.

۲) $y = \tan x + \cot x$ تابع ثابت است این تابع متناوب و دوره تناوب آن $T = \frac{\pi}{2}$ است.

۳) تابع $y = \tan x$ در $\mathbb{R}$ یکنوا نمی‌باشد، این تابع در بازه‌ای که تعریف شده باشد، اکیداً صعودی می‌باشد.

۴) با نمودار و محور تانژانت آشنا شوید.

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل دوم

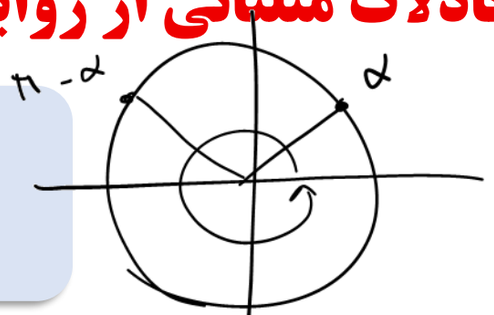
مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

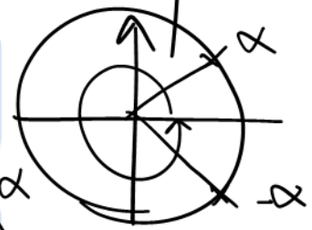
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

برای حل معادلات مثلثاتی از روابط زیر استفاده نمایید:

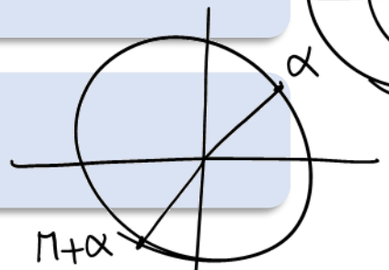
۱) $\sin x = a = \sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

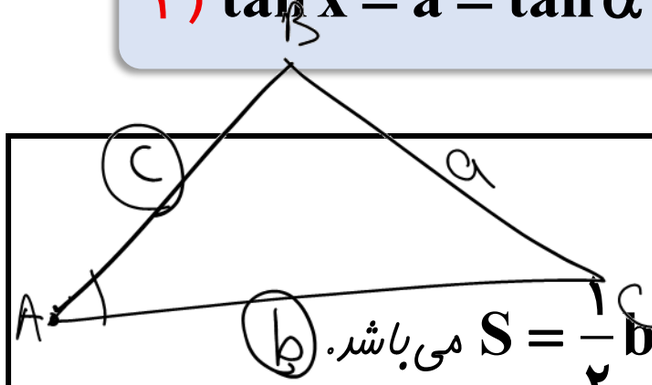


۲) $\cos x = a = \cos\alpha \rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$



۳) $\tan x = a = \tan\alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$





نکته!

۱) برد توابع سینوسی و یا کسینوسی، $[-۱,۱]$ می‌باشد.

۲) محاسبه مساحت مثلث به کمک دو ضلع و زاویه بین آن‌ها، $S = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$ می‌باشد.

$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

توجه کنید!!!

موارد خاص معادلات مثلثاتی به شرح روبه‌رو می‌باشد:

۱) $\sin x = ۰ \rightarrow x = k\pi$

۲) $\cos x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۳) $\sin x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۴) $\cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi$

۵) $\sin x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$

۶) $\cos x = -۱ \rightarrow x = (۲k - ۱)\pi$

سوال ۱۰- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. جواب های قابل قبول در $[0, 2\pi]$ را بدست آورید؟

الف) $2\sin 4x - \sqrt{3} = 0$ $\rightarrow \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{2\pi}{12} \end{cases}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$\boxed{\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha}$

ب) $\sin x\cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$

k	0	1	2
	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	X
	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	X

$k \in \mathbb{Z}$

پ) $\cos x(2\cos x - 7) = -5$

$\cos x = t$ $\rightarrow 2t^2 - 7t + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{5}{2} \quad \times \end{cases}$

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{cases} \\ a+c=b \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases} \end{cases}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل سوم

حدهای نامتناهی - حد در بینهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = \text{ن.ت}$ $\quad$ $\frac{\text{صفر عددی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{ن.ت}$ $\quad$ $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر عددی}} = 0$ $\quad$ $\frac{\text{صفر عددی}}{\text{صفر عددی}}$: مبهم

حدهای یک‌طرفه نامتناهی

در توابع کسری $\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $x \to a$ به طوری‌که $x = a$، ریشه مخرج کسر باشد و صورت کسر در همسایگی این نقطه حدی مخالف صفر داشته باشد، خواهیم داشت که:

$$\frac{\text{عدد مخالف صفر}}{\text{صفر (حدی)}} = \infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \infty$$

و لازم است که علامت این ∞ را تشخیص دهیم؛ بنابراین می‌بایست علامت صورت و مخرج این کسر مشخص شود.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

برای این امر می‌بایست حد چپ و راست مورد بررسی قرار گیرند، بنابراین اگر:

$$\frac{+\text{ عدد}}{0^+} = +\infty \qquad \frac{-\text{ عدد}}{0^+} = -\infty \qquad \frac{+\text{ عدد}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\text{ عدد}}{0^-} = +\infty$$

همچنین نمودار تابع در حالت‌های مختلف:

$x=a$ $\qquad$ $x=a$

۱) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۱- حاصل حدود زیر را به دست آورده و نمودار آن‌ها را در نزدیکی مجانب قائم‌شان (در صورت وجود) رسم کنید.

$\xrightarrow{HOP} \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{2x+2}{2x+4} = \frac{-2}{0} = \infty$

الف) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2x+1}{9-x^2} = \frac{9+1}{9-\bar{9}} = \frac{7}{\overset{+}{0}} = +\infty$

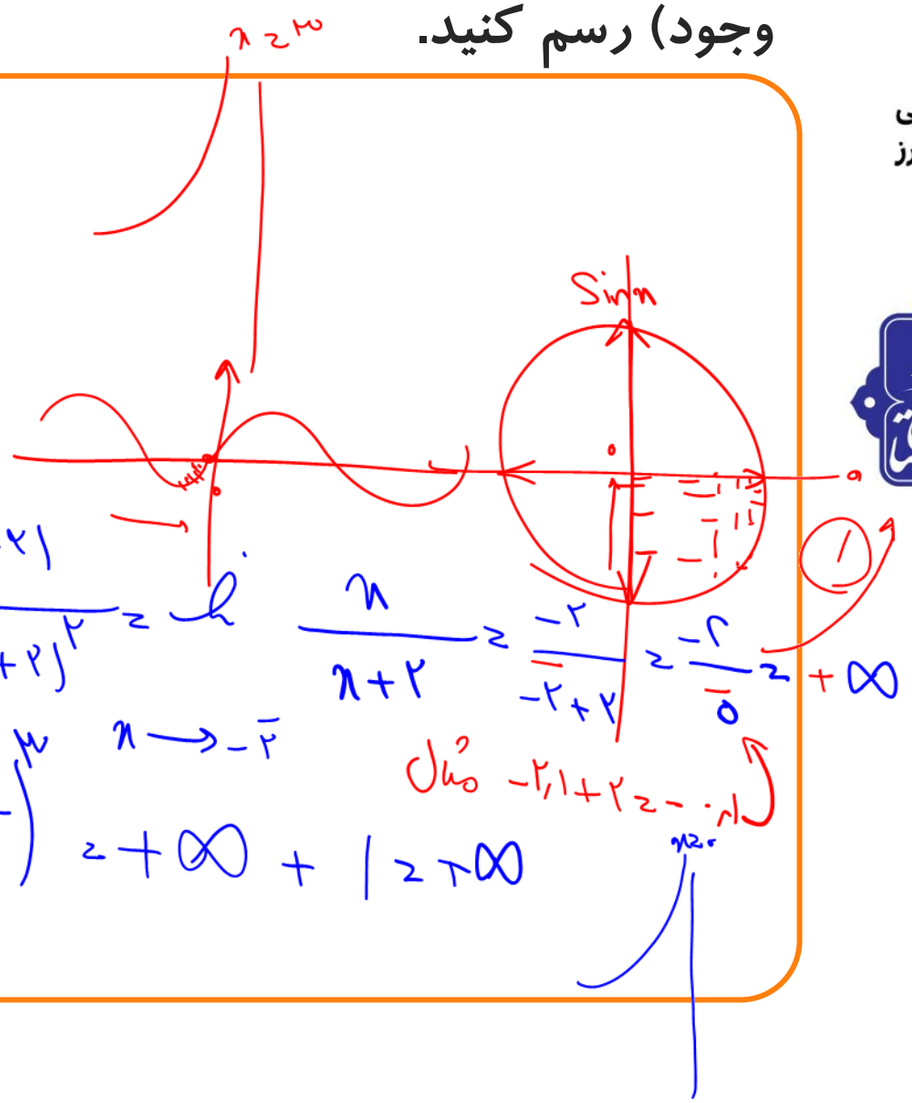
مثلاً: $9-8{,}9 = 0{,}1$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3x-1}{\sin x} = \frac{0-1}{\sin 0} = \frac{-1}{\bar{0}} = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to (-2)^-} \frac{x^2+2x}{x^2+4x+4} = \frac{4-4}{4-8+4} = \frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x(x+2)}{(x+2)^2} = \lim \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{-2+2} = \frac{-2}{\bar{0}} = +\infty$

مثلاً $-2{,}1+2 = -0{,}1$

ت) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x+\sin^3 x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = +\infty + 1 = +\infty$



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مجانب قائم

در تعریف مجانب قائم، خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گوییم؛ هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

نکته!

در توابع کسری، ریشه‌های مخرج می‌توانند مجانب قائم باشند به شرط آنکه:

اول، همسایگی آن لااقل از یک طرف در دامنه تابع موجود باشد؛

دوم، اینکه اگر رادیکالی در تابع وجود داشت زیر رادیکال را منفی نکند.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۲- مجانب‌های قائم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+3}{2-x}$

ریشه مخرج $2-x=0 \longrightarrow x=2$

$\boxed{D:[0,+\infty)}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3}{2-x} = \dfrac{5}{2-2^+} = \dfrac{5}{\bar{0}} = -\infty$

مثال $2-2.1=-0.1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+3}{2-x} = \dfrac{5}{2-2^-} = \dfrac{5}{\overset{+}{0}} = +\infty$

مثال $2-1.99=0.1$

$x=2$

ب) $g(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x}+x+1}{x^3-x}$

$\boxed{x\geq 0,\ x\neq 1}$

$x^3-x=0 \longrightarrow x(x^2-1)=0$

$x=0$

$x=1$

$x=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2\sqrt{x}+x+1}{x(x^2-1)} = \dfrac{1}{-0\times -1} = \dfrac{1}{\bar{0}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2\sqrt{x}+x+1}{x(x^2-1)} = \dfrac{3}{0} = \begin{cases} x\to 1^+: \dfrac{3}{0^+} = +\infty \\ x\to 1^-: \dfrac{3}{\bar{0}} = -\infty \end{cases}$

$x=0$

$x=1$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۳- نمودار تابع زیر، در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

$$f(x)=\frac{-2}{2x-|x|}$$

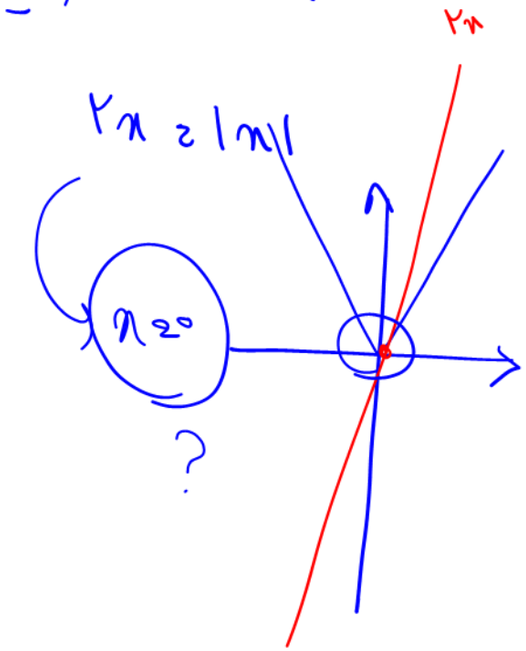
x	$-$	0	$+$

$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} \frac{-2}{2x-|x|} = \frac{-2}{0-0} = \frac{-2}{0} = \infty$

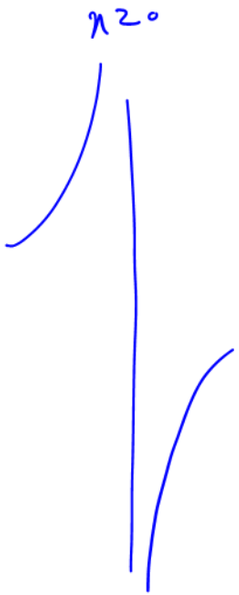
ریشه مخرج $2x-|x|=0$

$2x = |x|$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

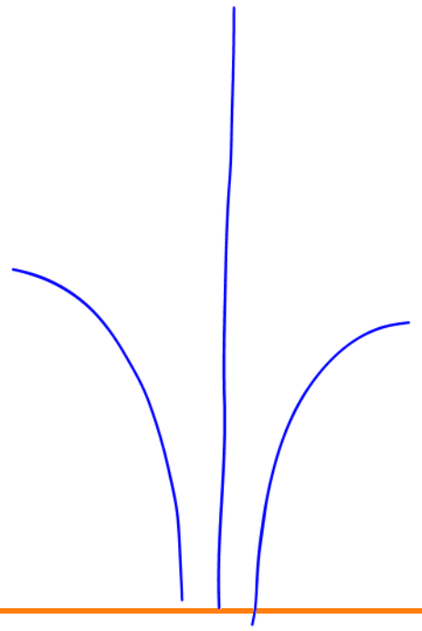


پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۴- نمودار تابع زیر در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

$$f(x)=\frac{-۳}{(x+۱)^{۲}}$$

$x=-1 \longrightarrow \lim_{x\to -1} \frac{-۳}{(x+1)^{۲}} = \frac{-۳}{0^{+}} = -\infty$



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

حد در بینهایت

تعریف ۱: اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

هرگاه بتوان با انتخاب xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از L را به هر اندازه کوچک کرد.

تعریف ۲: اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، گوییم $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

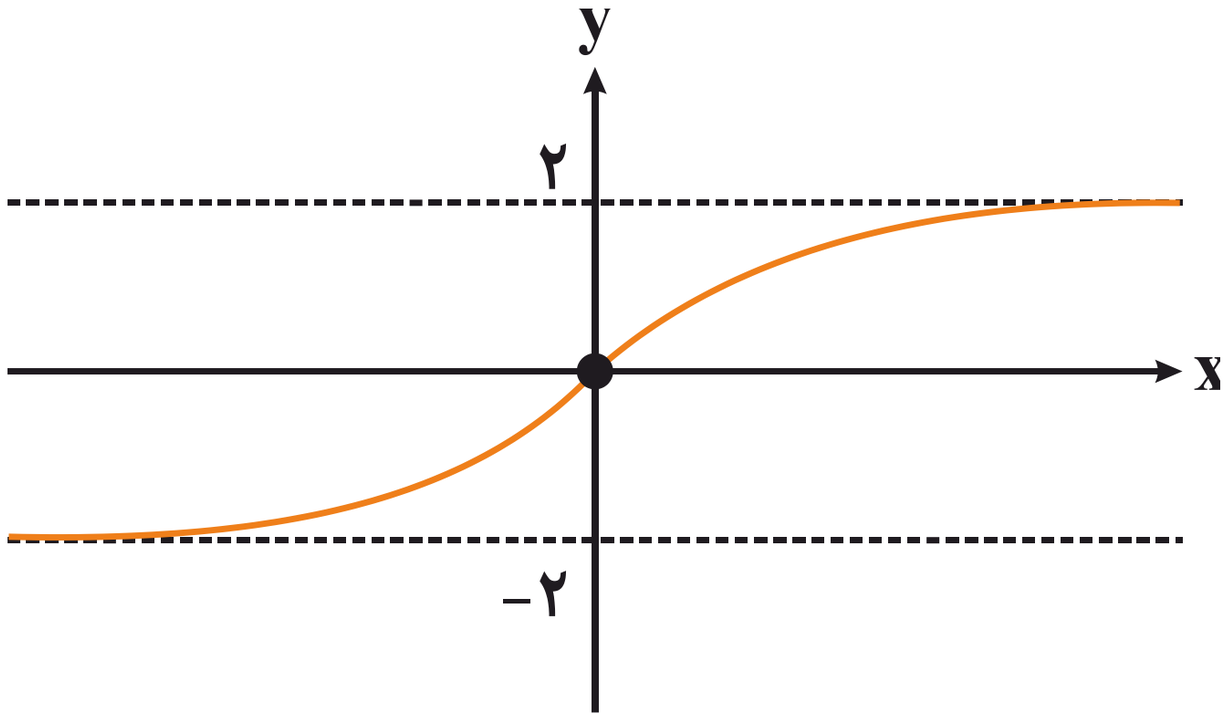
هرگاه بتوان با انتخاب xهای به قدر کافی کوچک، فاصله $f(x)$ از L را به هر اندازه کوچک کرد.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مثلاً:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -۲$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۲$$



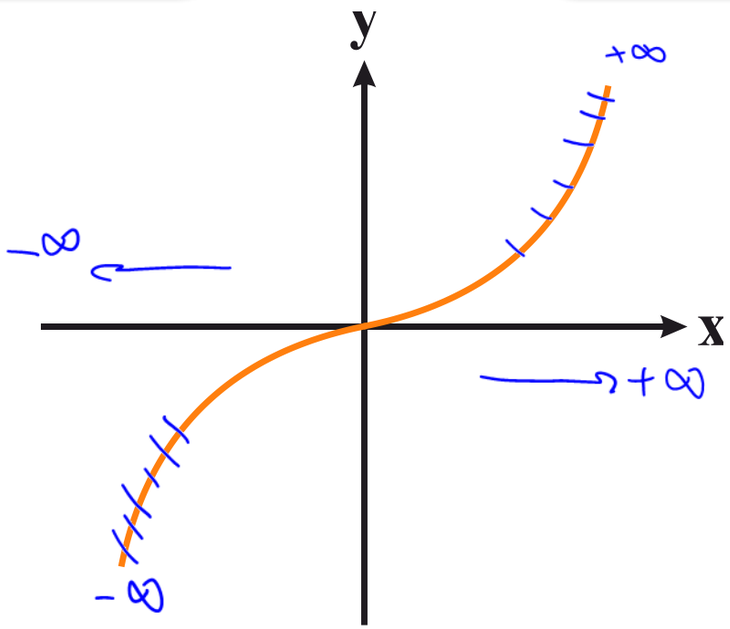
پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

حد بینهایت در بینهایت

مثلاً:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

نکته ۱

$$\lim_{x\to+\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

به عبارت دیگر حد هر چندجمله‌ای در بینهایت برابر است با حد جمله‌ای که بزرگ‌ترین درجه را دارد.

مثلاً:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(-5x^4 + 3x^3 - 2x + 4) = \lim_{x\to\pm\infty}(-5x^4) = -\infty$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

نکته ۲

حد توابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌آی باشند به فرم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n \cancel{x^n}}{b_m \cancel{x^m}} = \begin{cases} \infty & n > m \quad \text{اگر} \\ \dfrac{a_n}{b_m} & n = m \quad \text{اگر} \\ 0 & n < m \quad \text{اگر} \end{cases}$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۵- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{5x^2-4x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{5x^2} = \dfrac{1}{5}$ $\boxed{y=\dfrac{1}{5}}$

$\sqrt{x^2}=|x|$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{4x^2+4x-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{2|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{-2x} = -\dfrac{3}{2}$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+|x|}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

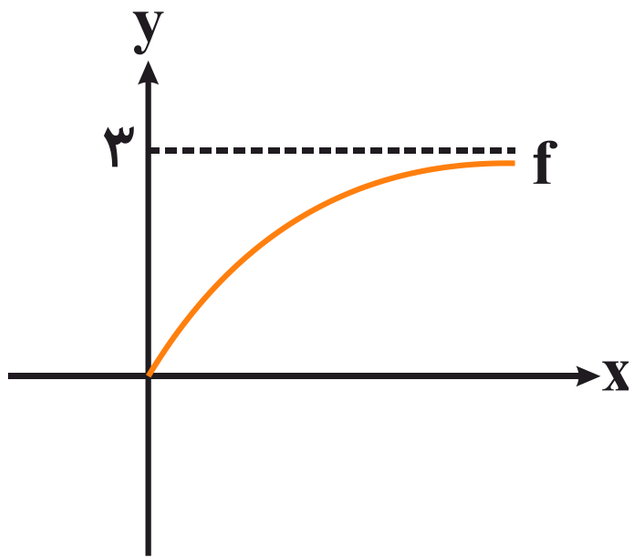
پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

مثلاً در شکل زیر:



خط $y = ۳$ مجانب افقی تابع است زیرا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۳$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۶- مجانب‌های افقی توابع زیر را بیابید.

الف) $y = \dfrac{1+5x^2}{3-10x^2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2}{-10x^2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

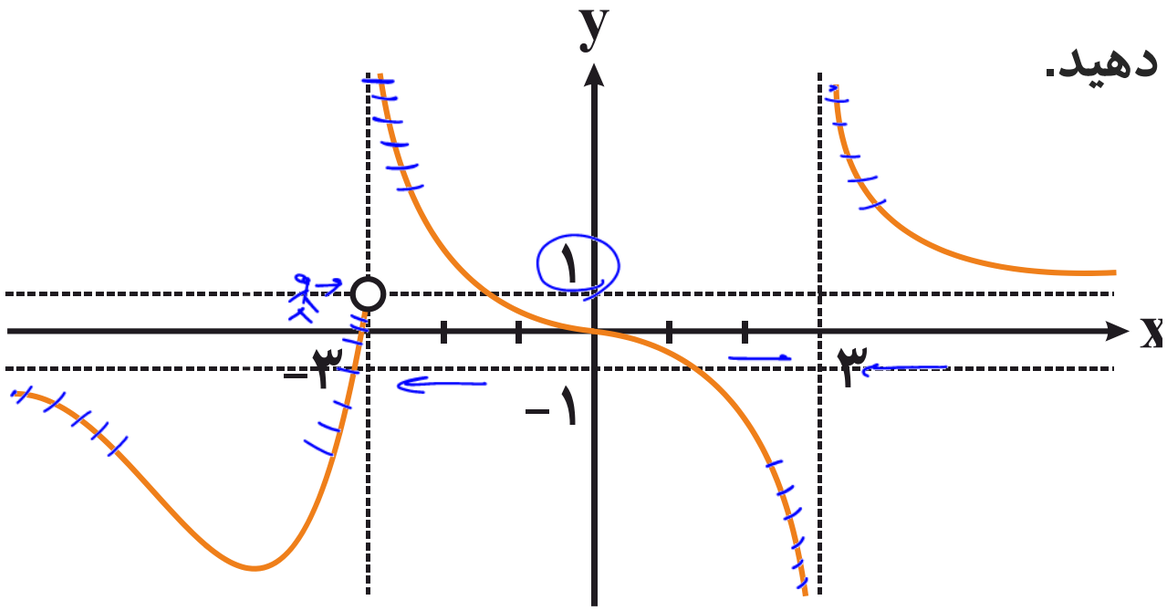
ب) $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x^2}+2x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x+|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}}$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۷- با توجه به نمودار سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?$ ۱

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=?$ -۱

پ) $\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=?$ $+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=?$ $-\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)=?$ $+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to(-۳)^-} f(x)=?$ ۱

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

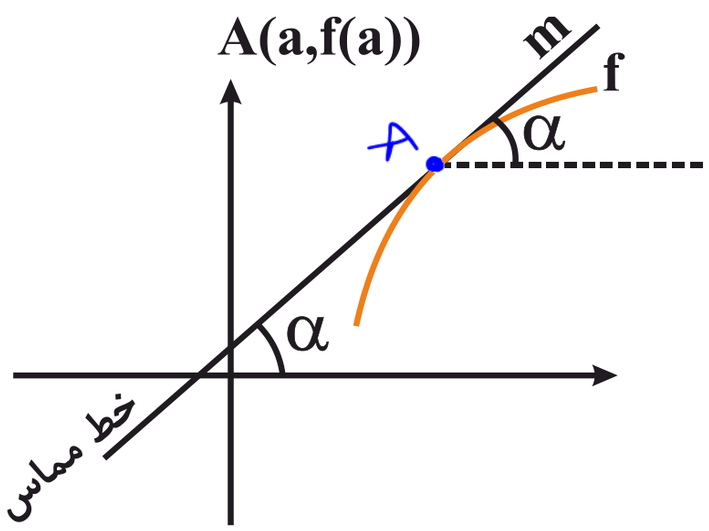
فصل چهارم

مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطهٔ $A(a,f(a))$ در صورت وجود برابر است با:



$$\tan\alpha = m = f'(a) = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\text{تعریف اول}}$$

$$\tan\alpha = m = f'(a) = \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{تعریف دوم}}$$

برای مقایسه مقدار (اندازه) شیب خطوط و یا به عبارت دیگر مشتق تابع در نقاط مختلف نمودار تابع از قانون بردار تانژانت استفاده کنید.

معادله خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطهٔ A برابر است با:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

نکته!

۱) در تعریف اول اگر $h \to 0^+$ و در تعریف دوم اگر $x \to a^+$ در صورت وجود حاصل حد مشتق راست یعنی $f'(a)$ و اگر $h \to 0^-$ یا $x \to a^-$، مشتق چپ یعنی $f'(a)$ به دست خواهد آمد.

$+$ $-$

نکته!

۲) اگر $f'(a) = f'(a)$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطهٔ A مشتق‌پذیر است.

$+$ $-$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = -x^{۲} + ۱$ را در نقطه‌ای به طول -۱ به دست آورید.

$A(-1 , 0)$ $\quad f(-1) = -1+1 = 0$

$$m = f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(-x^2+1) - (0)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{-(\cancel{x^2-1})}{\cancel{x+1}} \quad -(x-1)$$

$$= 2 = m$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x+2$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۱۹- نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید که:

الف) A نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

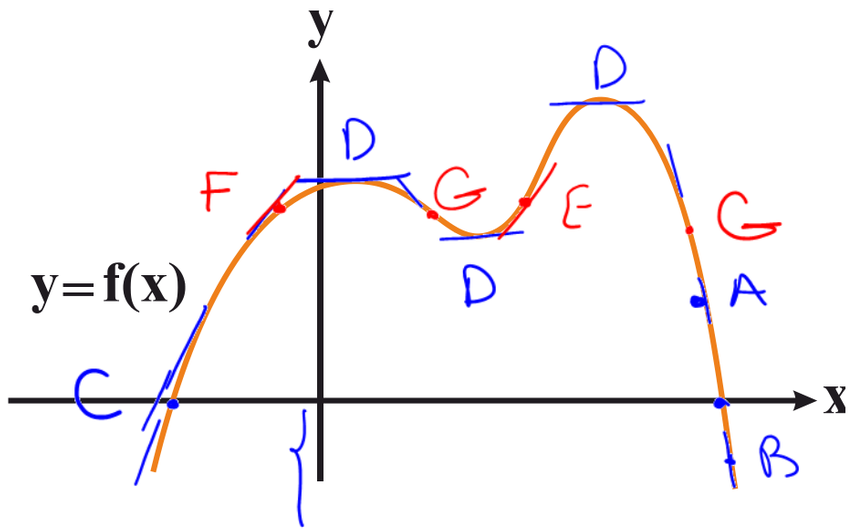
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوت روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل چهارم

مشتق

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

نکته!

۱) تابع f در نقطه‌ای به طول a از دامنه f، مشتق‌پذیر است هرگاه:

اول، در آن نقطه پیوسته باشد.

دوم، مشتق چپ و راست f در $x = a$ موجود برابر و معین باشد، یعنی: $f'(a) = f'(a)$

$-$ $+$

نکته!

اگر $f(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته نیز خواهد بود؛ عکس این قضیه همواره برقرار نمی‌باشد.

نکته!

اگر f در $x = a$ پیوسته نباشد در این نقطه مشتق‌پذیر نیز نخواهد بود.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

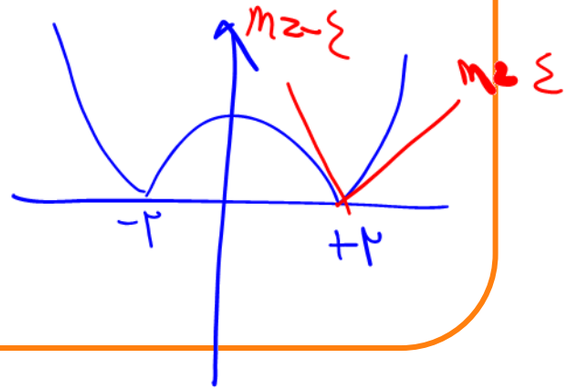
سوال ۲۰- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$ را در $x=۲$ بررسی کنید.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=$$

		-۲		۲
$x^{۲}-۴$	$+$	۰	$-$	۰ $+$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(x+۲)=۴=f'_{+}(۲)\\[2ex] \lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{-(x^{۲}-۴)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}-(x+۲)=-۴=f'_{-}(۲)\end{cases}$$

$\neq \rightarrow$ مشتق ناپذیر



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

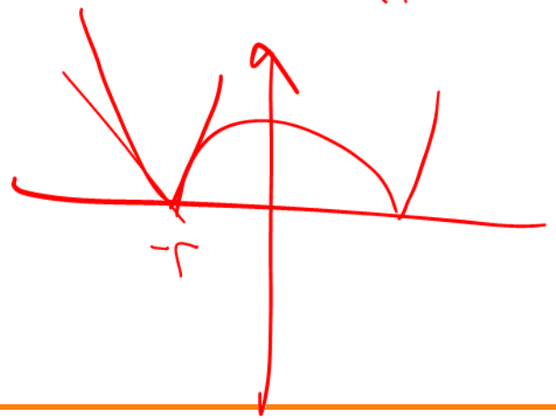
سوال ۲۱- معادلهٔ نیم مماس چپ و راست تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$ را در $x=۲$ به دست آورید.

$A(۲,۰)$

$m_۱ = f'_{+}(۲) = ٤ \Rightarrow y - ۰ = ٤(x-۲)$

$m_۲ = f'_{-}(۲) = -٤ \Rightarrow y - ۰ = -٤(x-۲)$

	-۲		۲	
$+$		$-$		$+$
$\frac{(x^۲-۴)}{x+۲}$		$\frac{-(x^۲-٤)}{x+۲}$		



پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

نقاط مشتق‌پذیری تابع f(x) به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ پیوسته

اول: ناپیوسته‌ها

دوم: پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر

۱) ناپیوستگی تابع: می‌دانیم که اگر f(x) در نقطه $x = a$ ناپیوسته باشد در آن نقطه حتماً مشتق‌ناپذیر است، بنابراین در این زمینه می‌توان به نقاط مرزی دامنه بسته تابع – نقاط مرزی توابع چندضابطه‌ای – ریشه مخرج توابع کسری و ... توجه نمود.

$[a, b]$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

۲) پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر: این مورد خود به سه شاخه زیر طبقه‌بندی می‌شود:

الف) گوشه: مشتق چپ و راست در این نقطه دو عدد نابرابر یا یکی برابر عدد و دیگری بینهایت است، مانند:

۱- نقاط مرزی توابع چندضابطه‌ای ?

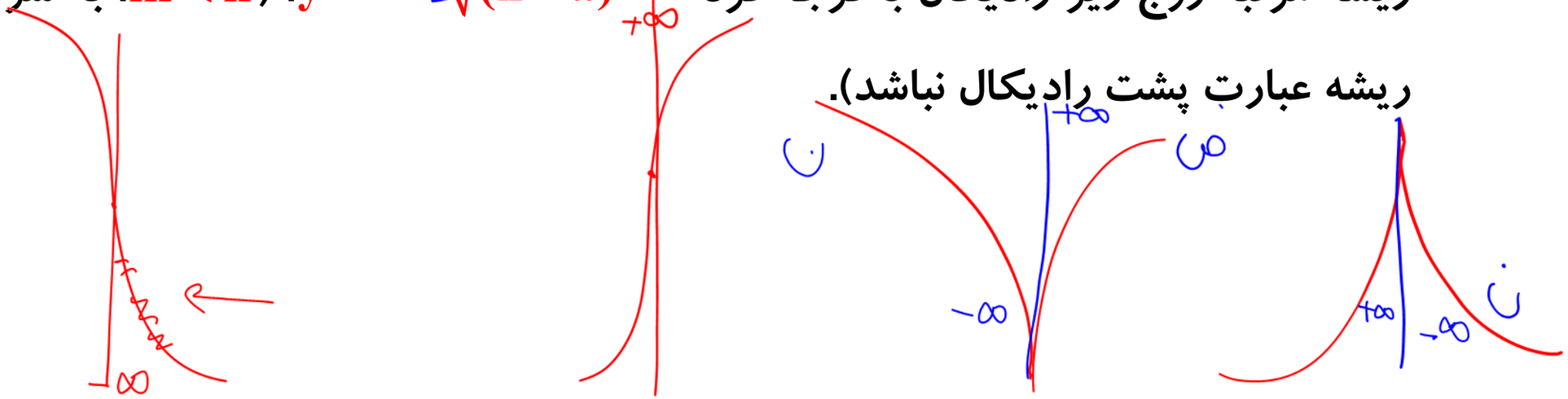
(مهم) ۲- ریشه ساده درون قدرمطلق $y = |x - a|$ به شرط آنکه ریشه عامل پشت قدرمطلق نباشند.

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

ب) عطف قائم: مشتق چپ و راست در این نقطه هر دو بینهایت هم‌علامت هستند مانند ریشه مرتبه فرد زیر رادیکال با فرجه فرد $y = \sqrt[2n-1]{(x-a)^{2m-1}}$ (به شرط آنکه $m < n$) در پیوسته $x = a$ ولی مشتق‌ناپذیر است به شرط آنکه ریشه عامل صفرکننده پشت رادیکال نباشد.

پ) بازگشت منحنی: مشتق چپ و راست در این نقطه بینهایت مختلف‌العلامهٔ می‌باشند، مانند ریشه مرتبه زوج زیر رادیکال با فرجه فرد $y = \sqrt[2n-1]{(x-a)^{2m}}$، ($m < n$)، به شرط آنکه ریشه عبارت پشت رادیکال نباشد).



پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

تابع مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

دامنه تابع مشتق: محدوده مشتق‌پذیری تابع را گویند و بنابه تعریف برابر است با:

$$D_{f'} = D_f - \{\text{نقاط مشتق‌ناپذیری تابع}\}$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲۲- دامنه مشتق تابع $y = (\sqrt[3]{x-1}).|x^2-4|$ را مشخص کنید.

$+1$ عضو تمام

± 2 گوشه

$D_f = \mathbb{R}$

$D_{f'} = D_f - \{$نقاط مشتق ناپذیر$\}$

$D_{f'} = \mathbb{R} - \{\pm 2, +1\}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲۳- تابع مشتق $f(x)=\sqrt{x}$ را به دست آورید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

فرمول‌های مشتق

۱) $y = k \longrightarrow y' = ۰ \qquad k \in \mathbb{R}$	۲) $y = x \longrightarrow y' = ۱$
۳) $y = x^{n} \longrightarrow y' = nx^{n-۱}$	۴) $y = \sqrt{x} \longrightarrow y' = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$
۵) $y = \sqrt[n]{x^{m}} \xrightarrow{m<n} y' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	۶) $y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x$
۷) $y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x$	۸) $y = \tan x \longrightarrow y' = ۱ + \tan^{۲} x$
۹) $y = \cot x \longrightarrow y' = -(۱ + \cot^{۲} x)$	

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

اعمال جبری روی مشتق توابع

۱) $y = ku \rightarrow y' = ku'$ $\quad k \in \mathbb{R}$

اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشند و $k \in \mathbb{R}$ آنگاه:

۲) $y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v'$

۳) $y = u.v \rightarrow y' = u'v + v'u$

۴) $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^{۲}}$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مشتق تابع مرکب

$$y = fog(x) = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x) \times f'(g(x))$$

به طور مشابه: $y = f(u) \longrightarrow y' = u' \times f'(u)$

بنابراین:

۱) $y = u \longrightarrow y' = u'$	۲) $y = u^n \longrightarrow y' = nu'u^{n-1}$
۳) $y = \sqrt{u} \longrightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	۴) $y = \sqrt[n]{u^m} \xrightarrow{m<n} y' = \dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$
۵) $y = \sin u \longrightarrow y' = u' \cos u$	۶) $y = \cos u \longrightarrow y' = -u' \sin u$
۷) $y = \tan u \longrightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$	۸) $y = \cot u \longrightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲۴- مشتق توابع زیر را بنویسید.

الف) $y = ۳x^{۲} + \sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{x}$ $\longrightarrow y' = ۶x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{0-1}{x^2}$

$\frac{k}{x} \longrightarrow \frac{-k}{x^2}$

ب) $y = \sin^{۲}(\sqrt{x})$ $\longrightarrow y' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) \sin(\sqrt{x})$

u

خودنسبت × مشتق نسبت × مشتق کان × توان × ضریب

مثلثاتی

با توان یک واحد کمتر

پ) $y = \frac{۴\sin(۵x)}{۲x + \cos x}$

$$y' = \frac{(4 \times 5\cos(5x))(2x+\cos x) - (2-\sin x)(4\sin(5x))}{(2x+\cos x)^2}$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مشتق مرتبه دوم و بالاتر

اگر عملیات محاسبه مشتق تابع را ادامه دهیم مشتق مراتب بالاتر (در صورت وجود) به دست می‌آید به عنوان نمونه: $y=f(x) \longrightarrow y'=f'(x) \longrightarrow y''=f''(x)$

بنابراین اگر مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ در $x=a$ موجود باشد، خواهیم داشت که:

۱) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

۲) $f'_-(a) = f'_+(a)$

۳) $f''_-(a) = f''_+(a)$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^{3}+bx+c & x>1 \\ x^{2}-x+1 & x\le 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق مرتبه دوم داشته باشد، مقادیر c, b, a را مشخص کنید.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}+0+c \rightarrow c=\frac{2}{3}$

$$f'(x)=\begin{cases} 3ax^{2}+b & x>1 \\ 2x-1 & x<1 \end{cases}$$

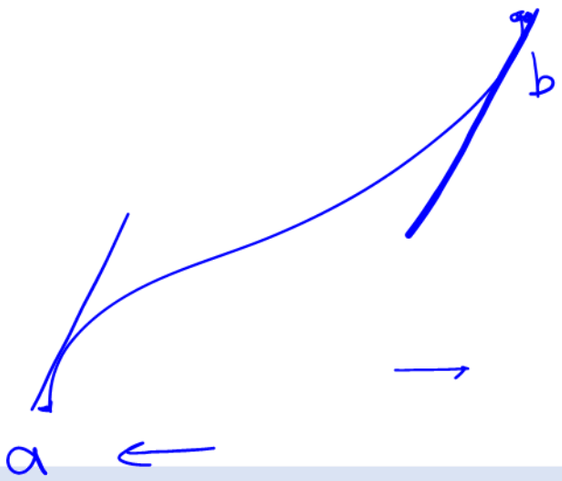
$\rightarrow f'_{-}(1) = f'_{+}(1) \Rightarrow 1 = 3a+b \Rightarrow b=0$

$$f''(x)=\begin{cases} 6ax & x>1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$$

$f''_{-}(1) = f''_{+}(1) \rightarrow 2 = 6a \rightarrow a=\frac{1}{3}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز



مشتق‌پذیری روی بازه

تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$(a,b]$

۱- تابع f روی هر نقطه از بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

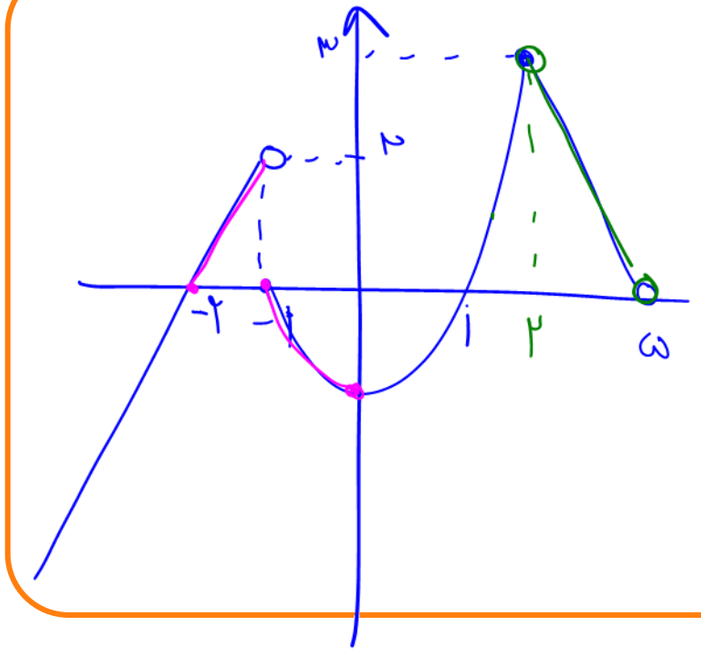
~~۲~~- در نقطه a مشتق راست داشته باشد.

~~۳~~- در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

(a,b) $[a,b)$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲۶- با رسم نمودار $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲\le x<۵ \end{cases}$ مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-۱,۱]$ ، $[-۲,۰]$ و $(۲,۵)$ بررسی کنید.



$[-۱,۱]$ مشتق پذیر

$[-۲,۰]$ در $x=-۱$ پایه نه — مشتق ناپذیر

$(۲,۵)$ ✓

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل چهارم

مشتق

درس سوم: آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییرات

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تعریف آهنگ متوسط تغییرات

آهنگ متوسط تغییرات تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ برابر است با:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

تعریف آهنگ لحظه‌ای تغییرات

آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)$$

نکته!

اگر متغیر مسئله زمان (t) باشد از لفظ سرعت به جای آهنگ نیز استفاده می‌شود.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲۷- اتومبیلی طبق معادله $f(x) = -۳x^{۲} + ۱۲x$ در حال حرکت است، مطلوبست:

الف) سرعت متوسط اتومبیل در بازه $[۰,۲]$.

ب) سرعت لحظه‌ای اتومبیل در لحظه $t = \frac{۳}{۲}$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{(-۱۲ + ۲۴) - (۰)}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

$$f'(x) = -۶x + ۱۲ \xrightarrow{x = \frac{۳}{۲}} f'\left(\frac{۳}{۲}\right) = -۹ + ۱۲ = ۳$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل پنجم

کاربرد مشتق

درس اول: تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

۱) اگر برای هر x در (a,b)، $f'(x) > 0$ باشد آنگاه f دراین بازه **اکیداً صعودی** است.

۲) اگر برای هر x در (a,b)، $f'(x) < 0$ باشد آنگاه f دراین بازه **اکیداً نزولی** است.

۳) اگر برای هر x در (a,b)، $f'(x) = 0$ باشد آنگاه f دراین بازه **ثابت** است.

یادآوری: اگر تابع f در (a,b) ثابت باشد هم صعودیست و هم نزولی، ولی اکید نیست.

نکته!

بنابراین ممکن است f' حتی دارای بی‌شمار ریشه باشد ولی ریشه‌ها تشکیل بازه ندهند، در این صورت اگر f' تغییر علامت ندهد علاوه بر یکنوا، اکیداً یکنوا نیز خواهد بود.

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۲۸- تابع $y = x^3 - 3x^2 + 2$ را در نظر بگیرید، در چه بازه‌هایی این تابع صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$y' = 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0 \to x = 0,\ x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f' = 3x^2 - 6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

صعودی $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

نزولی $(0, 2)$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل پنجم

کاربرد مشتق

درس دوم: آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

مرحله اول: با توجه به دامنه تابع f، f' را محاسبه می‌کنیم سپس f' را تعیین علامت می‌کنیم.

مرحله دوم: با توجه به جدول‌های زیر نوع اکسترمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم.

$C \in (a , b)$

x	$-\infty$	C	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	min		
	↘	نسبی	↗

min نسبی

x	$-\infty$	C	$+\infty$
f'	$+$		$-$
f	Max		
	↗	نسبی	↘

Max

سوال ۲۹- مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+10$ را به روش آزمون مشتق اول تعیین کنید.

$-\frac{5}{2}\times 2x \Rightarrow -5x$

$y' = x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0 \to x=3,\ x=2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'=x^2-5x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Max نسبی $f(2)$	$\searrow$	min نسبی $f(3)$	$\nearrow$	

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل پنجم

کاربرد مشتق

درس سوم: تعیین نقاط بحرانی تابع

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

نقطه $C \in D_f$ نقطه بحرانی تابع $f(x)$ می‌باشد، هرگاه $f'(c) = 0$ و یا $f'(c)$ ناموجود باشد.

برای تعیین نقاط بحرانی تابع f:

۱) دامنه تابع را مشخص کنید.

۲) مشتق تابع را محاسبه کنید.

۳) نقاطی که در آن مشتق برابر صفر باشد و یا ناموجود به شرط آنکه عضو دامنه تابع باشند بحرانی‌اند.

** برای آنکه $f'(x) = 0$ ریشه‌های صورت مشتق را محاسبه کنید و برای آنکه $f'(x)$ ناموجود باشد، می‌توانید به گزینه‌هایی نظیر ریشه مخرج مشتق – نقطه مرزی دامنه توابع چندضابطه‌ای (نیاز به بررسی دارد) و نقطه اول و آخر بازه بسته دامنه تابع توجه کنید. **

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱

نکته!

کل دامنه تابع ثابت، نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

نکته!

مجانب قائم تابع، نقطه بحرانی تابع نمی‌باشد زیرا عضو دامنه تابع نیست.

نکته!

هر اکسترمم نسبی حتماً یک نقطه بحرانی تابع می‌باشد ولی عکس این مطلب همواره برقرار نمی‌باشد مانند نقطه اول و آخر بازه بسته دامنه تابع.

b

a

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳۰- نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x^3-3x)'}$ را به دست آورید.

$D_f = \mathbb{R}$

$\{-\sqrt{3}, \times, 0, \times, \sqrt{3}\}$

$f'(x) = \dfrac{1(3x^2-3)}{3\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}}$

بحرانی $\{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$

بحرانی

$f' = 0 \longrightarrow 3x^2-3=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1 \in D_f$ ✓

$f' \text{ ت.ن} \longrightarrow x^3-3x=0 \longrightarrow x(x^2-3)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \ ✓ \\ x=\pm\sqrt{3} \ ✓ \end{cases}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

نحوه محاسبه نقاط اکسترمم مطلق تابع f در بازه $[a,b]$:

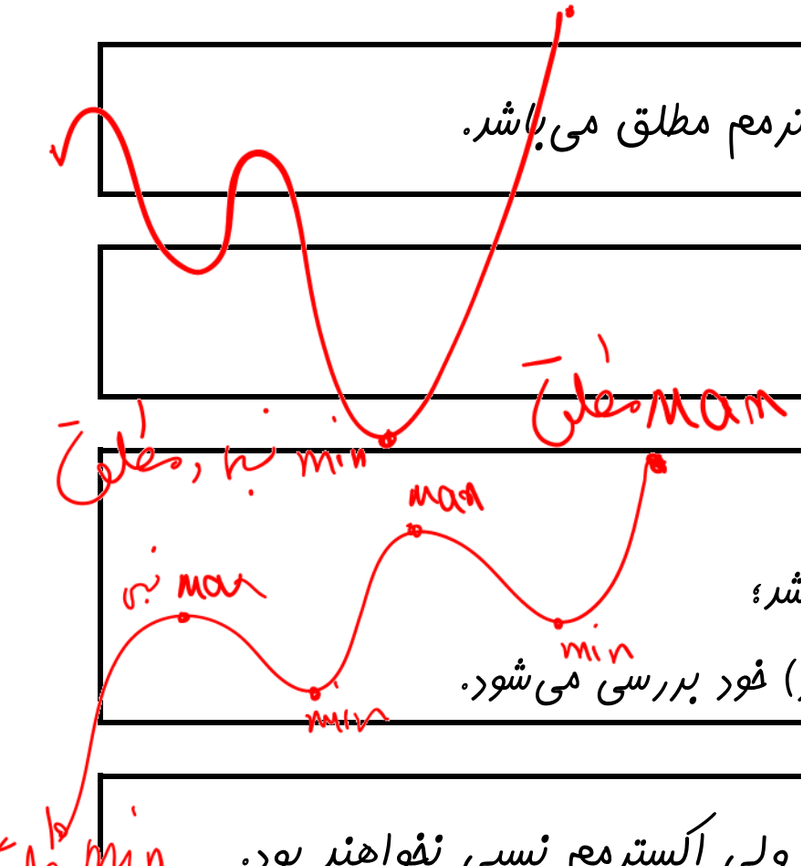
۱) اگر دامنه تابع داده نشده باشد، اولین کاری که می‌بایست انجام دهید تعیین دامنه تابع می‌باشد.

۲) مشتق تابع را محاسبه کنید.

۳) نقاط بحرانی قابل قبول تابع را مشخص کنید.

۴) مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی تابع محاسبه کنید.

۵) اختصاص ماکسیمم مطلق به بیشترین مقدار به دست آمده و مینیمم مطلق به کمترین مقدار به دست آمده.



نکته! اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد در این فاصله حتماً دارای اکسترمم مطلق می‌باشد.

نکته! فاصله بین مینیمم تا ماکسیمم مطلق تابع همان بُرد تابع می‌باشد.

نکته! تفاوت اکسترمم نسبی و مطلق:

اکسترمم مطلق، کمترین یا بیشترین مقدار تابع در کل دامنه تابع می‌باشد؛

حال آنکه در اکسترمم نسبی عرض نقطه نسبت به نقاط همسایه (مجاور) خود بررسی می‌شود.

نکته! نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته دامنه تابع، توانایی مطلق شدن را دارند ولی اکسترمم نسبی نخواهند بود.

نکته! اگر C یک نقطه درونی بازه $I \subset D_f$ باشد و f در $x = C$ اکسترمم مطلق باشد، در این صورت اکسترمم نسبی تابع نیز خواهد بود.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳۱- اکسترمم مطلق تابع $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13$ را در دامنه $[-1,2]$ مشخص کنید.

$f'(x) = -6x^2 + 18x$

بحرانی:

$f' = 0 \longrightarrow -6x^2 + 18x = 0 \longrightarrow -6x(x-3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = 3 \times \end{cases}$

f' ن $\rightarrow x = -1, 2$

$f(-1) = 2 + 9 - 13 = -2$

$f(2) = -16 + 36 - 13 = 7$ مطلق max

$f(0) = -13$ مطلق و نسبی min

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳۲- اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^{۴} - ۲x^{۲} + ۳$ را در $[-۱,۲]$ به دست آورید.

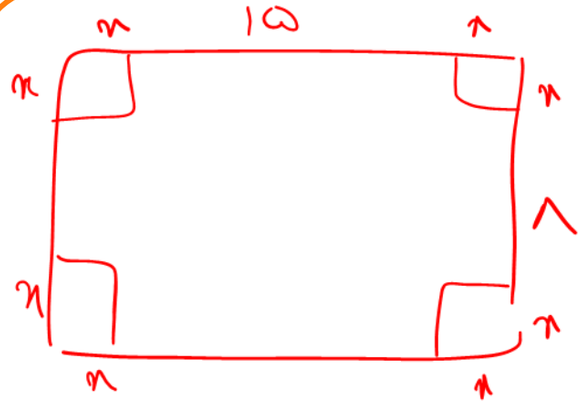
پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

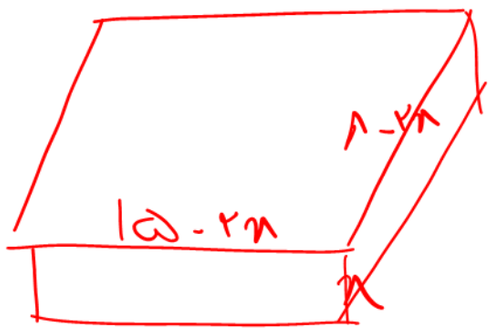
پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

بهینه‌سازی

در اینگونه مسائل به دنبال بیشترین یا کمترین مقدار مسئله مطرح شده می‌باشیم، بنابراین برای پاسخگویی ابتدا با کمک داده‌های مسئله، متغیر اضافی را حذف کنید (یعنی همه متغیرها را برحسب یک متغیر معرفی کنید) در مطلوب مسئله (مسئله مطرح شده) جایگزین کنید تا رابطه به دست آمده برحسب یک متغیر مرتب شود سپس نقاط بحرانی رابطه جدید را به دست آورید تا پاسخ مسئله به ازای اکسترمم‌های مطلق آن داده شود.

سوال ۳۳- یک سازندهٔ جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های هم‌نهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۱۵ و ۸ سانتی‌متر و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌هایی سرباز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود، چقدر باید باشد؟





$$V = (15-2x)(8-2x)x = (15-2x)(8x-2x^2)$$

$$V' = -2(8x-2x^2) + (8-4x)(15-2x) = -16x+4x^2+120-60x+8x^2$$

$$V' = 12x^2 - 76x + 120 = 0 \xrightarrow{\div 4} 3x^2 \qquad \geq 0 \rightarrow$$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳۵- دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن باشد؟

داده: $x - y = 10 \longrightarrow y = x - 10$

مطلوب: $\max(xy) = x(x-10) = x^2 - 10x$

مشتق: $2x - 10 = 0 \longrightarrow x = 5$

$\Rightarrow y = -5$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل پنجم

کاربرد مشتق

درس چهارم: جهت تقعر و نقطه عطف یک تابع

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

جهت تقعر نمودار یک تابع یعنی جهت گودی نمودار آن که برای تشخیص آن از تعیین علامت مشتق دوم تابع استفاده می‌کنیم.

۱) اگر به ازای هر $x \in I \subset D_f$: $f''(x) > 0$ باشد، تقعر روبه بالا است.

۲) اگر به ازای هر $x \in I \subset D_f$: $f''(x) < 0$ باشد، تقعر روبه پایین است.

نقطه عطف: فرض کنید تابع f در نقطه $x = C$ پیوسته باشد در این صورت $(C, f(c))$ نقطه عطف تابع است. هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) نمودار f در نقطه $(C, f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر در نقطه $(C, f(c))$ تغییر کند.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳۵- جهت تقعر و نقاط عطف نمودار تابع $y = \frac{۱}{۴}x^{۴} - ۲x^{۳} + ۲$ را به دست آورید.

$y' = x^{۳} - ۶x^{۲}$

$y'' = ۳x^{۲} - ۱۲x = ۰$

$۳x(x - ٤) = ۰$

x		0		2	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y		عطف		عطف	

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳۶- در تابع $\boxed{y = ax^4 + bx^3}$، a و b را طوری بیابید که نقطهٔ $A(-1,2)$ عطف تابع باشد؟

$y' = 4ax^3 + 3bx^2$

$y'' = 12ax^2 + 6bx$

اولاً $a - b = 2$

ثانیاً $y''(-1) = 0 \Rightarrow 12a - 6b = 0$

$$\begin{cases} 12a - 6b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \times -6$$

$6a = -12 \rightarrow a = -2 \Rightarrow b = 4$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

فصل پنجم

کاربرد مشتق

درس پنجم: رسم نمودار

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز ۱۳۰۱
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

برای رسم نمودار توابع مراحل زیر را انجام دهید:

۱) با توجه به دامنه تابع، f' را محاسبه کنید، نقاط بحرانی تابع را مشخص کنید.

۲) f'' را محاسبه کنید و نقاط عطف تابع را در صورت وجود تعیین کنید.

۳) در صورت وجود، مجانب‌های تابع را مشخص کنید.

۴) اطلاعات فوق را در جدول تغییرات تابع (یعنی جدولی که جهت یکنوایی و تقعر و اکسترمم و عطف تابع را نشان می‌دهد) مشخص کنید.

۵) با کمک اطلاعات فوق نمودار تابع را رسم کنید.

سوال ۳۷- جدول تغییرات و نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3$ را رسم کنید.

$D = \mathbb{R}$

$A\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$

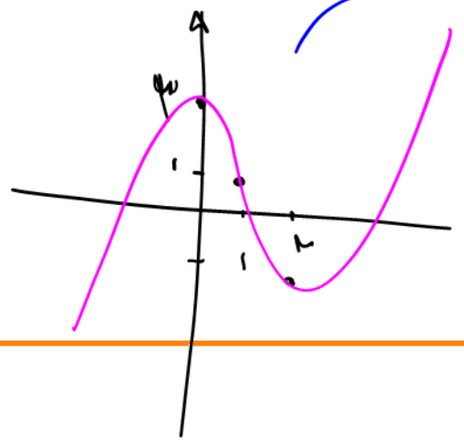
$y' = 3x^2 - 6x$

بحرانی $\begin{cases} y' = 0 \to 3x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ y' \text{ ت.ن} \to \times \end{cases}$

$y'' = 6x - 6$

عطف $\begin{cases} y'' = 0 \to 6x - 6 = 0 \to x = 1 \\ y'' \text{ ت.ن} \to \times \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$y' = 3x^2 - 6$		+		−		−		+	
$y'' = 6x - 6$		−		−		+		+	
y	$+\infty$	↗	3 max	↘	1 عطف	↘	-1 min	↗	$+\infty$



پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

سوال ۳۱- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x+۲}$ را رسم کنید.

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

طراح و تایپیست: سولماز موسویان

شناسه کاربری سولماز موسویان در برنامه بله: @mousaviangraphice

شناسه کاربری استاد شمعی در برنامه بله: @ostadshamei